Partialbruch-Zerlegung

Eine Methode, wie man einen Bruch mit einem Nennerprodukt
in zwei Brüche zerlegt,
deren Nenner nur die Faktoren enthalten.

Es ist die Umkehrung der Addition von Brüchen
mit verschiedenen Nennern.

Anwendung vor allem in der Oberstufe
zur Vereinfachung komplizierter Integrale.

Datei Nr. 43055

Friedrich W. Buckel

Stand: 18. Juli 2011

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort:

Diese Methode der Partialbruchzerlegung wird heute kaum mehr im Unterricht eingesetzt. Ich kannte sich noch mit der Methode des Koeffizientenvergleichs. Inzwischen hat mit ein Kollege ein neue, viel einfachere Methode geschickt. Daher habe ich den ganzen Text überarbeitet und für jede Aufgabe zweierlei Lösungen erstellt.

Außerdem:

Der Text 48017 Integral Theorie 7 enthält eine ganze Reihe weiterer Beispiele zur Partialbruchzerlegung, die man verwenden kann, selbst wenn man jetzt nicht damit Integrale vereinfachen möchte.

Problemstellung

Wenn wir eine Summe von 2 „einfachen“ Brüchen berechnen, ergibt sich oft ein „komplizierterer Bruch“, etwa so:

$$\frac{3x+1}{x+2}+\frac{2x}{x-3}=\frac{(3x+1)(x-3)+2x(x+2)}{(x+2)(x-3)}=\frac{3x^2-9x+x-3+2x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$$

Also gilt: $$\frac{3x+1}{x+2}+\frac{2x}{x-3}=\frac{5x^2-4x-3}{(x+2)(x-3)}.$$

Schüler der Oberstufe benötigen (heute fast nicht mehr) für manche Zwecke den umgekehrten Rechenweg, d.h. sie haben einen Term, also diesen hier

$$\frac{5x^2-4x-3}{(x+2)(x-3)}$$

und sollen ihn in eine Summe aus zwei Brüchen zerlegen, welche die Nenner $x + 2$ bzw. $x – 3$ haben. Es erhebt sich die Frage, wie man das machen soll.

Es geht also darum, einen komplizierten Bruch in zwei Teilbrüche (vornehmer gesagt „Partialbrüche“) zu zerlegen. Das Verfahren das wir jetzt kennen lernen, und das man locker in Klasse 8 behandeln kann, nennt man daher Partialbruchzerlegung.

Die Anwendung liegt in der Integralrechnung der Oberstufe. Mit dieser Methode kann man nämlich komplizierte Integrale aus solchen Brüchen in einfachere verwandeln.

Inhalt

1 Algebraische Vorübung

Für das im Anschluss verwendete Einsetzungsverfahren zeige ich eine Vorübung, welche das Verständnis fördern soll.

a) Für welche A und B gilt: $5x-1=A(x-5)+B(x+7)$?

Da man zwei Unbekannte A und B sucht, benötigt man zwei Gleichungen.
Diese kann man dadurch erzeugen, dass man für x zweimal einen Wert einsetzt.

1. Beispiel: x = 0 eingesetzt: $5\cdot\boxed{0}-1=A\left(\boxed{0}-5\right)+B\left(\boxed{0}+7\right)$ ergibt: $-1=-5A+7B$

x = 1 eingesetzt: $5\cdot\boxed{1}-1=A\left(\boxed{1}-5\right)+B\left(\boxed{1}+7\right)$ ergibt: $4=-4A+8B$

Dieses Gleichungssystem kann man lösen, leider aber sind die Koeffizienten von A und B etwas ungünstig. Wir haben uns die Arbeit selbst schwer gemacht. Es gibt viel günstigere Zahlen für x:

2. Beispiel: x = 5 eingesetzt: $5\cdot\boxed{5}-1=A\underbrace{\left(\boxed{5}-5\right)}_{0}+B\left(\boxed{5}+7\right)$ ergibt: $24=12\cdot B$, also B = 2

$x=-7$ eingesetzt: $5\cdot\boxed{-7}-1=A\left(\boxed{-7}-5\right)+B\underbrace{\left(\boxed{-7}+7\right)}_{0}$ ergibt: $-36=-12\cdot A$, also A = 3.

Jetzt habe ich zwei Zahlen gewählt, die Nullen erzeugen!

Ergebnis: $5x-1=3(x-5)+2(x+7)$

b) Für welche A und B gilt: $2x^2-11x+16=A(x-3)+B\cdot(x-3)^2+Cx$?

Da man drei Unbekannte A, B und C sucht, benötigt man drei Gleichungen.
Diese kann man dadurch erzeugen, dass man für x dreimal einen günstigen Wert einsetzt.

x = 0 eingesetzt: $2\cdot\boxed{0}^2-11\cdot\boxed{0}+16=A\left(\boxed{0}-3\right)+B\cdot\left(\boxed{0}-3\right)^2+C\cdot\boxed{0}$

ergibt: $16=-3A+9B$ (1)

x = 3 eingesetzt: $2\cdot\boxed{3}^2-11\cdot\boxed{3}+16=A\underbrace{\left(\boxed{3}-3\right)}_{0}+B\cdot\underbrace{\left(\boxed{3}-3\right)}_{0}^2+C\cdot\boxed{3}$

ergibt: $18-33+16=3\cdot C \Rightarrow 3C=1 \Rightarrow C=\frac{1}{3}$

x = 4 eingesetzt: $2\cdot\boxed{4}^2-11\cdot\boxed{4}+16=A\underbrace{\left(\boxed{4}-3\right)}_{1}+B\cdot\underbrace{\left(\boxed{4}-3\right)}_{1}^2+C\cdot\boxed{4}$

ergibt: $32-44+16=A+B+4C$.

Mit $C=\frac{1}{3}$: $4=A+B+\frac{4}{3} \quad |\cdot 3$

$12=3A+3B+4$ (2)

(1) + (2): $28=12B+4 \Rightarrow 12B=24 \Rightarrow B=2$

In (1): $16=-3A+18 \Rightarrow 3A=2 \Rightarrow A=\frac{2}{3}$

Ergebnis: $2x^2-11x+16=\frac{2}{3}(x-3)+2(x-3)^2+\frac{1}{3}x$

2 Brüche mit Zählergrad < Nennergrad

Wir wollen hier Brüche zerlegen, die diese Form haben: $\boxed{\dfrac{cx+d}{(x+a)(x+b)}}$

Beispiel 1: Zerlege so: $\dfrac{3x+23}{(x+3)(x-4)} = \dfrac{A}{x+3} + \dfrac{B}{x-4}$, gesucht sind A und B.

Das alles gibt es ausführlich auf der Mathe-CD.